Tema 2: Lógica

Lógica. Estructuras deductivas

- Una deducción es un proceso de razonamiento que permite obtener una conclusión a partir de algunas premisas.

- $$P_1, P_2, \ldots, P_n \Longrightarrow Q \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline Q \end{array}$$

  donde las fórmulas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son las ***premisas*** o ***hipótesis*** y Q la ***conclusión*** o ***tesis***.

Consecuencia lógica

- Una **estructura deductiva** $P_1, P_2, \ldots, P_n \Longrightarrow Q$ es ***correcta***, o bien que Q es ***consecuencia lógica*** de $\Phi = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, si todos los modelos de Φ son modelos de Q.
- Si existe una valoración que es modelo de las premisas y no es modelo de la conclusión, la estructura deductiva es incorrecta, y esta valoración es un *contraejemplo*.
- La deducción $P_1, P_2, \ldots, P_n \Longrightarrow Q$ es correcta si y sólo si $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, \neg Q\}$ es ***insatisfactible***.

- Llamamos ***reglas de inferencia*** a una serie de deducciones correctas básicas.
  - **Modus ponens**: $A \to B, A \Longrightarrow B$.
  - **Modus tolens**: $A \to B, \neg B \Longrightarrow \neg A$.
  - **Silogismo**: $A \to B, B \to C \Longrightarrow A \to C$.
  - **Silogismo disyuntivo**: $A \vee B, \neg B \Longrightarrow A$.
  - **Simplificación**:
    1. $A \wedge B \Longrightarrow A$ y $A \wedge B \Longrightarrow B$.
    2. $A \Longrightarrow A \vee B$ y $B \Longrightarrow A \vee B$.
    3. $A, B \Longrightarrow A \wedge B$.
  - **Regla de la cadena**: Si $P_1, P_2, \ldots, P_n \Longrightarrow Q_1$ y $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q_1 \Longrightarrow Q$ son correctas, también lo es la estructura deductiva $P_1, P_2, \ldots, P_n \Longrightarrow Q$.

Métodos no automáticos de demostración

- Demostración directa o por derivación
- Demostración por reducción al absurdo o refutación
- Demostración por contrarrecíproco
- Demostración por casos
- Demostración de implicaciones

Demostración por contrarrecíproco

- En lugar de probar que $P_1, P_2, \ldots, P_n \Longrightarrow Q$ es correcta se demuestra por algunos de los métodos anteriores que es correcta la estructura deductiva $\neg Q \Longrightarrow \neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n)$.
- Este método consiste en demostrar que si la conclusión es falsa entonces una o varias premisas son falsas. La corrección de este tipo de demostración se deduce de que $F \Longrightarrow G$ es correcta si y sólo si $\neg G \Longrightarrow \neg F$ es correcta, y de la equivalencia $\neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \equiv \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \cdots \vee \neg P_n$.

Demostración por casos

- Para demostrar que $P \implies Q$ es correcta, donde P es la fórmula $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$, se demuestra, por alguno de los métodos anteriores, que cada una de las deducciones $P_1 \implies Q,\ P_2 \implies Q,\ \ldots\ P_n \implies Q$ es correcta.
- Este método está basado en la equivalencia $P_1 \vee \cdots \vee P_n \to R \equiv (P_1 \to R) \wedge \cdots \wedge (P_n \to R)$.

Teorema de deducción

- Para demostrar que $F \longrightarrow G$ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Φ, se demuestra que G es consecuencia lógica del conjunto $\Phi \cup \{F\}$.
- Esto es, se añade F al conjunto de hipótesis y se obtiene G.