Principios básicos de recuento

- Empezamos considerando una serie de
  resultados básicos de recuento
  que se obtienen de forma directa de:
  - las propiedades de las operaciones de conjuntos
  - cardinalidad de conjuntos finitos.

Principio de adición

- **Teorema: (Principio de adición)**

  Si A y B son conjuntos finitos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

- **Interpretación** como: "Dados A y B conjuntos finitos disjuntos, el primero con n objetos distintos, el segundo con m, entonces el número de maneras de seleccionar un objeto de entre los dos conjuntos es $n + m$".
- **Generalización:** "Dados k conjuntos disjuntos dos a dos tal que el primero tiene r_1 objetos distintos, el segundo r_2, ... y el k-ésimo r_k, el número de maneras de seleccionar un objeto de entre los k conjuntos es $r_1 + r_2 + \cdots + r_k$".

Principio de adición

- **Ejemplo:**

  En una biblioteca se tienen 9 libros escritos en castellano, 6 en francés y 8 en ruso. ¿De cuántas formas distintas se puede elegir un libro?

  Consideramos los tres conjuntos siguientes:
  - $A_1 =$ libros en castellano.
  - $A_2 =$ libros en francés.
  - $A_3 =$ libros en ruso.

  Son disjuntos y por el principio de adición el número de elecciones es

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| = 9 + 6 + 8 = 23.$$

Principio de multiplicación

- **Teorema: (Principio de multiplicación)**

  Si A y B son conjuntos finitos no vacíos, entonces el cardinal del producto cartesiano $A \times B = \{(a, b)/a \in A, b \in B\}$ es

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

- **Interpretación** como: "Dados A y B conjuntos finitos no vacíos, el primero con n objetos distintos, el segundo con m, entonces el número de elementos de su producto cartesiano $A \times B$ es $n \cdot m$".
- **Generalización:**

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$$

- Admite una formulación más amplia:

  "Si un proceso de selección puede ser dividido en m **pasos** con:

  - r_1 posibles elecciones en el **paso** 1,
  - r_2 elecciones en el **paso** 2 por cada una del paso 1,
  - hasta r_m posibles elecciones en el **paso** m**-ésimo** por cada combinación de las anteriores

  y todas las **selecciones resultantes** en el proceso completo son **distintas**,
  entonces el número de posibles selecciones es

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_m".$$

- **Ejemplo:**

  Tenemos 9 libros escritos en castellano, 6 en francés y 8 en ruso. ¿De cuántas maneras podemos elegir dos libros escritos en lenguas diferentes?

  Consideramos los tres conjuntos siguientes:

  - $A_1 =$ selecciones de un libro en castellano y uno en francés.
  - $A_2 =$ selecciones de un libro en castellano y uno en ruso.
  - $A_3 =$ selecciones de un libro en francés y uno en ruso.

  Son disjuntos y por el principio de adición el número de elecciones de dos libros de lenguas diferentes es

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

Para determinar $|A_1|$ se puede optar por cualquiera de las dos interpretaciones del principio de multiplicación:

- Considerar A_1 como un producto cartesiano:
  A_1 = {libros en castellano} $\times$ {libros en frances}.
- Las selecciones de A_1 se pueden construir como un proceso de dos pasos.
  1. seleccionamos el libro en castellano
  2. libro en francés.

Por el principio de multiplicación: $|A_1| = 9 \cdot 6.$

Igual para A_2 y A_3:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 9 \cdot 6 + 9 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 174$$

- Para **contar el número de elementos que pertenecen a la unión de una colección finita de conjuntos** y también el número de los que no pertenecen.
- **Notación:** dados los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$ denotamos por s_i a la suma de los cardinales de todas las intersecciones de i conjuntos de la colección.
- En particular:

$$s_1 = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

$$s_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_1 \cap A_n| + \\ +|A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_2 \cap A_n| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|$$

Principio de inclusión-exclusión

- **Teorema: (Principio de inclusión-exclusión)**

  Dados los conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$ se verifica

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} s_i$$

- En particular, si $n = 2$:

$$|A_1 \cup A_2| = s_1 - s_2 = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

si $n = 3$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = s_1 - s_2 + s_3 = (|A_1| + |A_2| + |A_3|) -$$

$$-(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Demostración principio de inclusión-exclusión

Dem.: Por las propiedades de los conjuntos complementarios se tiene

$$|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}| \underset{(*)}{=} |A| - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| =$$

$$= |A| - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} s_i = |A| + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} s_i$$

$(*)$ Por ser $A = (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup (\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n})$, unión disjunta, se tiene:

$$|A| = |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}|,$$

por tanto: $|\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}| = |A| - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|.$

Ejemplo principio de inclusión-exclusión

Ejemplo: Se define la función ϕ de Euler como $\phi(k) =$ *número de enteros* x *del intervalo* $1 \leq x \leq k$ *tales que* x *y* k *son primos entre sí*, es decir, $mcd(x, k) = 1$.

¿Cuánto vale $\phi(60)$?

Como $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, hay que contar los enteros entre 1 y 60 que **no** son divisibles ni por 2, ni por 3, ni por 5.

Consideramos los conjuntos siguientes:

- $A = \{1, 2, \cdots, 60\}$.
- $A_1 = \{n \in A / n$ es divisible por $2\}$.
- $A_2 = \{n \in A / n$ es divisible por $3\}$.
- $A_3 = \{n \in A / n$ es divisible por $5\}$.

Ejemplo principio de inclusión-exclusión

Hay que determinar: $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$
y por el principio de inclusión-exclusión:

$$\phi(60) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|)$$
$$+ (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Ejemplo principio de inclusión-exclusión

Hay que determinar: $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$
y por el principio de inclusión-exclusión:

$$\phi(60) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|)$$
$$+ (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Como:

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \text{Número de múltiplos de 2 en } A = \frac{60}{2} = 30 \\
|A_2| &= \text{Múltiplos de 3 en } A = \frac{60}{3} = 20 \\
|A_3| &= \text{Múltiplos de 5 en } A = \frac{60}{5} = 12 \\
|A_1 \cap A_2| &= \text{Múltiplos de 2 y 3 en } A = \\
&= \text{Múltiplos de } 2 \cdot 3 \text{ en } A = \frac{60}{6} = 10
\end{aligned}$$

Ejemplo principio de inclusión-exclusión

Razonando de manera análoga se calculan los restantes y se tiene que:

$$\phi(60) = 60 - (30 + 20 + 12) + (10 + 6 + 4) - 2 = 16$$

Selecciones sobre conjuntos

- Problema general de: "Dado un conjunto A de n elementos, ¿de cuántas formas distintas se pueden seleccionar r elementos de A?"

Hay que responder a:

1. El orden de los elementos elegidos es importante o no, en el sentido de obtener resultados distintos si se cambia el orden de elección.
2. Se permiten repeticiones, es decir, un mismo elemento puede ser elegido más de una vez en una misma selección.
3. El tamaño de la selección coincide con el tamaño del conjunto, es decir, si $r = n$.

Selecciones sobre conjuntos

- Las distintas respuestas a estas preguntas van a dar lugar a los distintos tipos de problemas o selecciones:

1. variaciones,
2. permutaciones y
3. combinaciones,

con y sin repetición.

- **Def.: (Variaciones sin repeticiones)**
Llamamos variación de r elementos en un conjunto A de n elementos $(n \geq r)$ a una selección ordenada de r elementos distintos de A.

- **Teorema:**
El número de variaciones de r elementos en un conjunto de n elementos, que denotaremos por $V(n,r)$, es

$$V(n,r) = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- **Dem.:**
Describimos el proceso de selección mediante r pasos.
  - Primer paso podemos elegir cualquier elemento de los n posibles.
  - En segundo paso podemos elegir $n-1$ elementos.
  - En el paso i-ésimo elegimos el elemento i-ésimo de forma que no coincida con ninguno de los anteriores, por tanto hay $n-i+1$ posibilidades.

Aplicando el principio de multiplicación obtenemos

$$V(n,r) = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- **Ejemplo:**

¿Cuántas palabras distintas de tres letras se pueden construir con un alfabeto $A = \{a,b,c,d\}$, de forma que no se repitan letras?

Se trata de determinar el número de selecciones de tres elementos de un conjunto de cuatro elementos:

1. sin repeticiones,
2. el orden importa.

Es decir, son variaciones de tres elementos sobre un conjunto de cuatro elementos sin repeticiones:

$$V(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

- **Def.: (Permutaciones sin repeticiones)**
Llamamos permutación de n elementos en un conjunto A a una selección ordenada de los n elementos de A.

Las permutaciones son variaciones donde el tamaño de la selección coincide con el número total de elementos del conjunto: $r = n$.

- **Teorema:** El número de permutaciones de un conjunto de n elementos, que denotaremos por $P(n)$, es

$$P(n) = n!$$

- **Dem.:** $P(n) = V(n,n) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$

Ejemplo permutaciones

- **Ejemplo:**

  ¿Cuántos números de cinco dígitos se pueden formar con cinco dígitos distintos y distintos del cero, no permitiéndose repeticiones?

  Cada número se forma eligiendo los cinco dígitos:

  1. En orden,
  2. sin repeticiones (se consideran reordenaciones).
  3. r=n.

  Se trata de permutaciones de cinco elementos:

$$P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Combinaciones

- **Def.:** **(Combinaciones sin repeticiones)**
  Llamamos combinación de r elementos en un conjunto A de n elementos $(n \geq r)$ a una selección sin orden de r elementos distintos de A.

- **Teorema:**
  El número de combinaciones de r elementos en un conjunto de n elementos, que denotaremos por $C(n, r)$, es

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Combinaciones

- **Dem.:**
  Podemos construir las variaciones de r elementos en un conjunto A de n elementos mediante un proceso con los dos siguientes pasos:

  1. Seleccionamos una combinación de r elementos.
  2. Permutamos los r elementos de dicha combinación.

  Aplicando el principio de multiplicación obtenemos

$$V(n, r) = C(n, r)P(r)$$

  y se deduce

$$C(n, r) = \frac{V(n, r)}{P(r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Ejemplo combinaciones

- **Ejemplo:**

  ¿Cuántos subconjuntos de r elementos tiene un conjunto de n elementos?

  Un conjunto de r elementos se determina seleccionando r elementos de los n posibles y además:

  1. No importa el orden en la selección (en un conjunto los elementos no están ordenados).
  2. No se permiten repeticiones (en un conjunto no puede haber elementos repetidos).

  Luego se trata de combinaciones de r elementos sobre un conjunto de n elementos:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Variaciones con repetición

- **Def.: (Variaciones con repeticiones)**
  Llamamos variación con repetición de r elementos en un conjunto A de n elementos a una selección ordenada de r elementos, posiblemente repetidos, de A.

- **Teorema:**
  El número de variaciones con repetición de r elementos en un conjunto de n elementos, que denotaremos por $VR(n, r)$, es

$$VR(n, r) = n^r$$

Variaciones con repetición

- **Dem.:**
  Describimos el proceso de selección mediante r pasos independientes:
  - Primer paso podemos elegir cualquier elemento de los n posibles.
  - En segundo paso podemos elegir n elementos.
  - En el paso i-ésimo podemos elegir n elementos.

  Aplicando el principio de multiplicación obtenemos

$$VR(n, r) = n \times n \times \ldots \times n = n^r$$

Ejemplo variaciones con repetición

- **Ejemplo:**
  ¿Cuántos boletos sencillos distintos de quiniela se pueden rellenar con tres resultados posibles 1, X, 2 para 14 partidos?

  Para rellenar una quiniela hay que marcar uno de los tres resultados posibles en cada uno de los 14 partidos y:
  1. El orden de asignación es importante, pues distinto orden da un boleto distinto,
  2. hay repeticiones ya que partidos distintos pueden tener el mismo resultado.

  Luego se trata de variaciones con repetición de 14 elementos sobre un conjunto de 3 elementos:

$$VR(3, 14) = 3^{14}.$$

Permutaciones con repetición

- **Def.: (Permutaciones con repeticiones)**
  Llamamos permutación con repetición en un conjunto A de n elementos, entre los que hay k grupos de elementos indistinguibles de tamaños $r_1, r_2, \ldots, r_k$, a una selección ordenada de los n elementos de A.

- **Teorema:**
  El número de permutaciones con repetición de n elementos en un conjunto con repeticiones de $r_1, r_2, \ldots, r_k$ elementos, que denotaremos por $P(n, r_1, r_2, \ldots, r_k)$, es

$$P(n, r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$$

Permutaciones con repetición

- **Dem.:**

Describimos el proceso de selección mediante $k+1$ pasos:

(1) Seleccionamos las posiciones de los r_1 elementos iguales de A, con $C(n, r_1)$ posibilidades,

(2) Seleccionamos la posición de los r_2 elementos iguales de A, con $C(n-r_1, r_2)$ posibilidades.

(i) $(2 \leq i \leq k)$ Seleccionamos las posiciones de los r_i elementos iguales de A, con $C(n-r_1-\ldots-r_{i-1}, r_i)$ posibilidades.

$(k+1)$ Generamos la permutación de los elementos restantes para colocarlos en las posiciones que quedan, con $P(n-r_1-\ldots-r_k)$ posibilidades.

Permutaciones con repetición

- **Dem.:**

Aplicando el principio de multiplicación tenemos

$$P(n, r_1, \ldots, r_k) = C(n, r_1)\, C(n-r_1, r_2) \cdots$$

$$\cdots C(n-r_1-\cdots-r_{k-1}, r_k)\, P(n-r_1-\cdots-r_k) =$$

$$= \frac{n!}{r_1!(n-r_1)!} \cdot \frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!} \cdots$$

$$\cdots \frac{(n-r_1-\cdots-r_{k-1})!}{r_k!(n-r_1-\cdots-r_k)!} \cdot (n-r_1-\cdots-r_k)! =$$

$$= \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$$

Ejemplo permutaciones con repeticiones

- **Ejemplo:**

¿Cuántas palabras distintas de ocho letras se pueden construir con todas las letras de la palabra TRABAJAR?

Se trata de reordenaciones o permutaciones de las 8 letras, donde hay letras repetidas: tres letras A, dos letras R.

Luego se tienen permutaciones de 8 elementos con grupos de elementos repetidos de 3 y 2 elementos:

$$P(8, 3, 2) = \frac{8!}{3!2!}$$

Combinaciones con repeticiones

- **Def.: (Combinaciones con repeticiones)**
Llamamos combinación con repetición de r elementos en un conjunto A de n elementos a una selección sin orden de r elementos, posiblemente repetidos, de A.

- **Nota:**
El número de combinaciones con repetición de r elementos en un conjunto de n elementos lo denotaremos por $CR(n, r)$.

Ejemplo combinaciones con repeticiones

- **Ejemplo:**

  En un bar un camarero atiende las peticiones de bebida de las mesas, que pueden ser un refresco, vino o cerveza. ¿Cuántas peticiones distintas puede atender en una mesa de cinco personas?

  Una petición consta de 5 elecciones de entre las 3 bebidas, se trata de selecciones de 5 elementos sobre un conjunto de 3 elementos con:

  - repeticiones y
  - el orden no importa pues sólo se considera el número de bebidas de cada clase.

  Hay que contar el número de combinaciones de 3 elementos seleccionados de 5 en 5 con repeticiones.

Ejemplo combinaciones con repeticiones

El camarero para apuntar las peticiones utiliza el siguiente sistema:

1. dibuja dos barras paralelas $||$
2. pone una marca X por cada elección:
   (a) a la izquierda de la primera barra si es un refresco,
   (b) entre las barras si es un vino,
   (c) a la derecha de la segunda barra si se trata de una cerveza.

Es decir, que si se piden 3 refrescos, un vino y una cerveza lo marcaría como: $XXX|X|X$.

Y de forma inversa un código como: $|XX|XXX$ representaría la petición de dos vinos y tres cervezas.

Ejemplo combinaciones con repeticiones

Cada petición se puede representar por un código según la pauta anterior.

Y cada código representa una petición.

Dos peticiones distintas se representarían mediante dos códigos también distintos.

Dos códigos diferentes representarían dos peticiones diferentes.

Luego el número de peticiones distintas coincide con el número de códigos distintos que se pueden dar.

Cada código es una permutación de las 5 X y de las 2 $|$, el número de permutaciones con repetición de esos 7 elementos, que por el apartado anterior:

$$CR(3,5) = P(5+3-1,5,3-1) = P(7,5,2) = \frac{7!}{2!}$$

Combinaciones con repeticiones

- **Teorema:**

  El número de combinaciones con repetición de r elementos en un conjunto de n elementos, que denotaremos por $CR(n,r)$, es

$$CR(n,r) = P(r+n-1,r,n-1) =$$

$$= C(r+n-1,r) = C(r+n-1,n-1) = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$