Selecciones sobre conjuntos

- $$V(n,r) = n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$
  $$VR(n,r) = n^r$$
- $$P(n) = n!$$
  $$P(n, r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$$
- $$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$
  $$CR(n,r) = P(r+n-1, r, n-1) =$$
  $$= C(r+n-1, r) = C(r+n-1, n-1) = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Espacio muestral y espacio de sucesos.

- Llamamos **experimento aleatorio** a un experimento que cumple las siguientes condiciones:

1 *Antes de realizar el experimento no sabemos cual va a ser el resultado del mismo, pero sí conocemos los distintos resultados posibles del experimento.*

2 *El experimento puede repetirse tantas veces como sea necesario en idénticas condiciones.*

- Son experimentos aleatorios, por ejemplo:
  - tirar un dado una vez y observar el resultado,
  - tirar un dado hasta que salga un seis y contar el número de tiradas que hemos realizado,
  - ejecutar un programa y medir el tiempo de ejecución del mismo.

Espacio muestral y espacio de sucesos.

- **Definición:** Llamamos **espacio muestral** asociado a un experimento aleatorio y lo denotaremos por E, al conjunto de todos los posibles resultados del experimento. Cada uno de estos resultados posibles se llama **suceso elemental**.

  ⋆ **Ejemplo:** Consideremos el experimento que consiste en *lanzar un dado*. El espacio muestral asociado es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

  Si el experimento consiste ahora en *lanzar un dado dos veces*, el espacio muestral asociado es $E = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\}$ (36 elementos).

- En el ejemplo anterior, *los espacios muestrales* son *finitos*. También puede suceder que el espacio muestral sea *infinito numerable* e incluso *infinito no numerable*.

Espacio de sucesos.

- En el experimento que consiste en lanzar un dado no solamente interesa estudiar los sucesos elementales del espacio muestral sino también resultados tales como "Sacar un número par", "Sacar un número ≤ 4", etc, que son subconjuntos del espacio muestral.
- **Definición:** Llamaremos **suceso compuesto** o simplemente **suceso**, a cualquier subconjunto del espacio muestral.
- ⋆ **Ejemplo:** podemos describir en términos de conjuntos los siguientes sucesos:
  A: "Sacar un número par" $= \{2,4,6\}$
  B: "Sacar un número ≤ 4" = $\{1,2,3,4\}$,
  ambos subconjuntos de $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Espacio de sucesos.

- **Definición:** Asociado a un experimento puede definirse un suceso que se verifica siempre. Lo llamaremos **suceso seguro** y lo designaremos por E. En el experimento consistente en lanzar un dado es, por ejemplo, el suceso "Sacar par o impar" $= E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Definición:** Definimos el **suceso imposible** como aquel que no se verifica nunca y lo designamos por $\emptyset$. En el experimento anterior es, por ejemplo, el suceso $\emptyset =$ "Sacar par e impar".
- **Definición:** El conjunto formado por todos los sucesos (elementales y compuestos) incluidos el suceso imposible y el suceso seguro se llama **espacio de sucesos**. Este conjunto es el conjunto de las partes del conjunto E. Lo designaremos por $\mathcal{P}(E)$

Operaciones entre sucesos.

- Sean A y B dos sucesos cualesquiera asociados a un experimento aleatorio, entonces:
- **Definición:**
- Llamamos **suceso unión** de A y B y lo designamos por $A \cup B$, al suceso que resulta cuando ocurre A o B o ambos a la vez.
- Llamamos **suceso intersección** de A y B y lo designamos por $A \cap B$, al suceso que resulta cuando ocurren a la vez A y B.
- Llamamos **suceso contrario** de A y lo designamos por $\bar{A}$, al que se verifica cuando no lo hace A.
- Llamamos **suceso diferencia** de A y B y lo designamos por $A - B$, al que resulta cuando ocurre A y no ocurre B. Observemos que $A - B = A \cap \bar{B}$.

Operaciones entre sucesos.

- ⋆ **Ejemplo:** El experimento consiste en lanzar un dado, consideramos los sucesos:
  A: "Sacar un número par"
  B: "Sacar un número ≤ 4" , entonces:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$
$$A \cap B = \{2, 4\}$$
$$\bar{A} = \text{"Sacar un número impar"} = \{1, 3, 5\}$$
$$A - B = A \cap \bar{B} = \{2\}$$

- **Definición:** Si dados dos sucesos A y B al verificarse uno no puede hacerlo el otro decimos que ambos son **sucesos incompatibles o disjuntos**. Observemos que, en este caso, se verifica que $A \cap B = \emptyset$.

Operaciones entre sucesos. Propiedades

- •Conmutativa :
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
- •Asociativa:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
- •Distributiva:
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
- •Leyes de De Morgan:
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Definición axiomática de probabilidad.

- **Definición:** (Kolmogorov 1933) Diremos que la aplicación $P : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$ es una **probabilidad** si verifica los siguientes axiomas:
- •Para todo suceso A, $P(A) \geq 0$
- • $P(E) = 1$
- •Si $\{A_i\}_{i \in I}$, son sucesos incompatibles dos a dos $(A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j)$, entonces $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, donde I puede ser finito o infinito numerable.
- A la terna $(E, \mathcal{P}(E), P)$, la llamaremos **espacio probabilístico**.

Consecuencias de los axiomas

- ⋆ **Propiedad1:** Si $A_1, A_2 \in \Omega$ son tales que $A_1 \subset A_2$, entonces $P(A_1) \leq P(A_2)$.
- ⋆ **Propiedad2:** Si $A \in \Omega$, entonces $0 \leq P(A) \leq 1$
- ⋆ **Propiedad3:** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- ⋆ **Propiedad4:** $P(\emptyset) = 0$
- ⋆ **Propiedad5:** Si A y B son sucesos cualesquiera, entonces
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- ⋆ **Propiedad6:** Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(E)$ son sucesos cualesquiera, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Consecuencias de los axiomas

- ⋆ **Propiedad7:** Sea $E = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, un espacio muestral finito, siendo los A_i sucesos elementales e incompatibles dos a dos. Supongamos además que $P(A_1) = \ldots = P(A_n) = \frac{1}{n}$. Entonces para cualquier subconjunto B de E tal que $B = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$, donde $\{i_j\} \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene que :
$$P(B) = P(A_{i_1}) + P(A_{i_2}) + \ldots + P(A_{i_k}) = \frac{k}{n}$$
- La propiedad anterior se conoce como
- **Regla de Laplace** (1812):

$$P(B) = \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de elementos de } B}{\text{N}^{\text{o}} \text{ de elementos de } E} = \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de casos favorables al suceso}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Selecciones sobre conjuntos

- $$V(n,r) = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$
$$VR(n,r) = n^r$$
- $$P(n) = n!$$
$$P(n, r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$$
- $$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$
$$CR(n,r) = P(r+n-1, r, n-1) =$$
$$= C(r+n-1, r) = C(r+n-1, n-1) = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$